

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 10 класса

Задача 1

Известно, что число $N = 202718099$ является произведением двух простых чисел p и q , а количество натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N , равно 202687920. Найдите числа p и q .

Задача 2

Для зашифрования фразы был взят кубик Рубика с нанесенными на гранях русскими буквами. Развертка кубика показана на рис. 1. Три его грани повернули по часовой стрелке на 90° . При этом грань с меньшим номером поворачивалась раньше, чем грань с большим номером. Затем каждая буква фразы отыскивалась на грани кубика и заменялась буквой этой же грани, следующей за ней по часовой стрелке (например, на рис. 1 буква **А** перейдет в букву **Б**, буква **П** в **С**). Буквы, находящиеся в центре грани, не заменялись. Известно, что перед шифрованием запятая во фразе была заменена на **ЗПТ**, точка – на **ТЧК**, пробелы пропускались. В результате получилась строка:

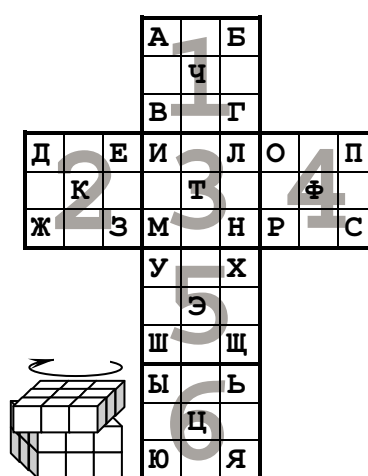


Рис. 1

ЕПОЕЪРИТСГЖЖЗТЯПСТАПДСБИСТЧК.

Прочтите исходное сообщение.

Задача 3

Для доступа к общему почтовому ящику в Интернете Катя и Юра пользуются паролем **СВЕЧА**. Катя решает сменить этот пароль на новый (осмысленное слово русского языка из пяти букв). Новый пароль передается по сети Юре в зашифрованном виде. Зашифрование осуществляется так. Первые буквы нового и старого пароля заменяются числами согласно таблице замены русских букв

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	0

Затем эти числа складываются, а полученная сумма заменяется остатком от деления на 33. Таким же образом поступают со вторыми буквами паролей, затем с третьими и т.д. После расшифрования Юра получил нечитаемый пароль из английских букв: **SARCL**. Оказалось, что программа расшифрования Юры была настроена на работу с английским алфавитом. При этом перед расшифрованием программа заменяла числовые значения поступившего за-

шифрованного пароля и старого пароля остатками от деления на 26, а расшифрование заключалось в нахождении их разностей (к отрицательной разнице прибавлялось число 26), которые приводились к буквенному виду согласно таблице замены латинских букв

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Помогите Юре понять, какой новый пароль установила Катя.

Задача 4

Торговые автоматы в Криптоландии принимают монетки номиналом только в 3 и 7 единиц. Укажите все цены, которые нельзя устанавливать на товары, продаваемые через автоматы подобного вида. Автоматы сдачу не дают.

Задача 5

Четыре фразы на русском языке записываются без знаков препинания и пробелов. Для зашифрования каждой фразы используются неизвестные последовательности цифр x_1, x_2, \dots, x_K . Буквы во фразе последовательно заменяются на пары цифр согласно таблице замены русских букв (к одноразрядным числам слева дописывается 0: например, **А** будет заменяться на **01**). Зашифрование состоит в преобразовании получившейся цепочки цифр по следующему правилу. К первой цифре цепочки прибавляем цифру x_1 и записываем последнюю цифру суммы, потом ко второй цифре цепочки прибавляем x_2 и также записываем последнюю цифру суммы и т.д. Результат зашифрования выглядит следующим образом:

- 1) 0436389637110156289614062778022668915272874106897713780236
- 2) 903913973306253415922423357601144271609271
- 3) 17915094077497245567822036742365175971
- 4) 3703532519925327917085909750657981901587194945023834835000452922

Известно, что две фразы зашифрованы с помощью одной и той же последовательности. Укажите, какие именно (ответ обосновать).

Задача 6

Известно, что три числа a_1, a_2, a_3 были получены следующим образом. Сначала выбрали натуральное число A и нашли числа $A_1 = [A]_{16}$, $A_2 = [A/2]_{16}$, $A_3 = [A/4]_{16}$, где $[X]_{16}$ – остаток от деления целой части числа X на 16 (например, $[53/2]_{16} = 10$). Затем было выбрано целое число B такое, что $0 \leq B \leq 15$. Числа A_1, A_2, A_3 и B записывают в двоичной системе счисления, т.е. представляют каждое из них в виде цепочки из 0 и 1 длины 4, приписывая слева необходимое число нулей. Такие цепочки условимся складывать посимвольно «в столбик» без переносов в следующий разряд согласно правилу: $1+1=0+0=0$ и $0+1=1+0=1$, а саму операцию посимвольного сложения обозначим символом \oplus . Например,

$3 \oplus 14 = (0011) \oplus (1110) = (1101) = 13$. Положим $a_1 = A_1 \oplus B$, $a_2 = A_2 \oplus B$, $a_3 = A_3 \oplus B$. Найдите все возможные значения числа a_3 , если известно, что $a_1 = 4$, $a_2 = 10$.